

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ.

Под *множеством* понимается совокупность каких-либо объектов, называемых *элементами множества*. Теория множеств занимается изучением свойств как произвольных множеств, так и множеств специального вида независимо от природы образующих их элементов. Терминология и многие результаты этой теории широко используются в математике, например в математическом анализе, геометрии и теории вероятностей.

Терминология. Если каждый элемент множества B является элементом множества A , то множество B называется *подмножеством* множества A . Например, если множество A состоит из чисел 1, 2 и 3, то у него существует 8 подмножеств (три из них содержат по 1 элементу, три – содержат по 2 элемента, одно подмножество, по определению, есть само множество A и восьмое подмножество – это пустое множество, не содержащее ни одного элемента). Запись $x \in A$ означает, что x – элемент множества A , а $B \subset A$ – что B является подмножеством множества A . Если *универсальное множество*, из которого мы берем элементы всех множеств, обозначить через Ω , то элементы, принадлежащие I , но не входящие в A , образуют множество, называемое *дополнением* множества A и обозначаемое $\neg A$, $\bar{A}$ или A' . Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* ($\emptyset$).

Над множествами можно производить операции, напоминающие операции, производимые в арифметике над числами. *Объединением* $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (элемент, принадлежащий множествам A и B одновременно засчитывается при включении в $A \cup B$ только один раз). *Пересечением* $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A , так и B . Предположим, например, что множество Ω состоит из всех букв русского алфавита, A – из всех согласных, а множество B – из букв, встречающихся в слове «энциклопедия». Тогда объединение $A \cup B$ состоит из всех букв алфавита, кроме $a, \bar{e}, y, \bar{z}, \bar{b}, \bar{y}, \bar{u}$, пересечение $A \cap B$ – из букв d, k, l, n, p, c , а дополнение A' – из всех гласных. Раздел теории множеств, который занимается исследованием операций над множествами, называется *алгеброй множеств*. Пустое множество играет в алгебре множеств роль нуля, и поэтому его часто обозначают символом $\emptyset$; например, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Булева алгебра. Алгебра множеств является подразделом булевых алгебр, впервые возникших в трудах Дж.Буля (1815–1864). В аксиомах булевой алгебры отражена аналогия между понятиями «множества», «событие» и «высказывания». Логические высказывания можно записать с помощью множеств и проанализировать с помощью булевой алгебры.

Даже не вдаваясь в детальное изучение законов булевой алгебры, мы можем получить представление о том, как она используется на примере одной из логических задач Льюиса Кэрролла. Пусть у нас имеется некоторый набор утверждений:

1. Не бывает котенка, который любит рыбу и которого нельзя научить всяким забавным штукам;
2. Не бывает котенка без хвоста, который будет играть с гориллой;
3. Котята с усами всегда любят рыбу;
4. Не бывает котенка с зелеными глазами, которого можно научить забавным штукам;
5. Не бывает котят с хвостами, но без усов.

Можно ли утверждать, что «не бывает котенка с зелеными глазами, который будет играть с гориллой»? Такое заключение едва ли очевидно, если рассматривать пять исходных утверждений в их словесной формулировке.

Сравнение множеств. Если из элементов двух множеств можно составить пары таким образом, чтобы каждому элементу первого множества соответствовал определенный элемент второго множества, а каждому элементу второго множества соответствовал один и только один элемент первого множества, то говорят, что между такими двумя множествами установлено взаимно однозначное соответствие. Чтобы установить взаимно однозначное соответствие, необязательно

пересчитывать элементы множеств. Например, мы знаем, что американские штаты находятся во взаимно однозначном соответствии с их столицами, хотя можем оставаться в неведении относительно общего их числа. Мы могли бы утверждать: «Столиц штатов ровно столько, сколько штатов». Между двумя конечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов. В теории множеств аналогичные утверждения используются, даже когда множества содержат бесконечно много элементов. Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что они имеют одинаковое количество элементов или равномощны. Если же при любом способе образования пар некоторые элементы из первого множества остаются без пары, то говорят, что первое множество содержит больше элементов, чем второе, или, что первое множество имеет большую мощность. С понятием мощности связаны, казалось бы, удивительные результаты. Например, на первый взгляд положительных целых чисел в два раза больше, чем четных положительных чисел, так как четно каждое второе число. Но, согласно теории множеств, четных положительных чисел столько же, сколько всех положительных целых чисел. Действительно, можно образовать пары чисел 2 и 1, 4 и 2, 6 и 3 и, вообще каждому четному числу $2n$ поставить в соответствие целое число n . Именно это обстоятельство имел в виду Б. Рассел (1872–1970), сформулировав факт, названный им парадоксом Тристрама Шенди. Герой романа Стерна сетовал на то, что ему потребовался целый год, чтобы изложить события первого дня его жизни, еще один год понадобился, чтобы описать второй день, и что при таком темпе он никогда не завершит свое жизнеописание. Рассел возразил, заметив, что если бы Тристрам Шенди жил вечно, то смог бы закончить свое жизнеописание, так как события n -го дня Шенди мог бы описать за n -й год и, таким образом, в летописи его жизни ни один день не остался бы не запечатленным. Иначе говоря, если бы жизнь длилась бесконечно, то она насчитывала бы столько же лет, сколько дней. Эти примеры показывают, что *бесконечное множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие со своим бесконечным подмножеством. Иногда это свойство принимают за определение бесконечного.*

Если можно установить взаимно однозначное соответствие между некоторым множеством и множеством положительных целых чисел, то говорят, что такое множество счетно. Для обозначения количества элементов в счетном множестве часто используют символ $\aleph_0$ (алеф-нуль). Так называемые «трансфинитные» числа, например $\aleph_0$, могут не подчиняться обычным законам арифметики. Например, так как существует $\aleph_0$ четных чисел, $\aleph_0$ нечетных и $\aleph_0$ целых чисел, то приходится признать, что $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Идея сравнения множеств путем установления взаимно однозначного соответствия между ними используется в различных разделах математики. Число всех действительных чисел, как показал основатель научной теории множеств Г. Кантор (1845–1918), больше, чем $\aleph_0$ чисел. Следовательно, если можно показать, что множество действительных чисел, обладающих некоторым особым свойством, является всего лишь счетным множеством, то заведомо должны существовать действительные числа, этим свойством не обладающие. Например, так как множество алгебраических чисел счетно, должны существовать неалгебраические числа. Такие числа называются трансцендентными.

Поразительная и далеко не очевидная теорема, высказанная в качестве гипотезы Кантором и доказанная Э. Шрёдером и Ф. Бернштейном около 1896, утверждает, что если можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством A и подмножеством множества B , и между множеством B и подмножеством множества A , то существует взаимно однозначное соответствие между всем множеством A и всем множеством B .

Парадоксы. Мы уже упоминали о том, что в теории множеств встречаются такие утверждения, как парадокс Тристрама Шенди, которые выглядят противоречащими здравому смыслу. Эти парадоксы возникают просто потому, что теория множеств, подобно многим математическим и физическим теориям, облекает свои идеи в обычные слова, вкладывая в них особый смысл. Однако

существуют и парадоксы, возникающие из-за внутренних логических трудностей самой теории множеств. Обильным источником парадоксов такого типа служит широко распространенная практика задания множества путем указания некоторого свойства его элементов, например, «множество, состоящее из английских слов, содержащих менее 19 букв».

Некритическое использование такого рода определений может привести к трудностям. Например, некоторые статьи в этой энциклопедии содержат ссылки на себя, другие таких ссылок не содержат. Мы могли бы включить в нашу энциклопедию дополнительную статью, состоящую только из перечня статей, не содержащих ссылок на себя. Принадлежала бы такая статья множеству статей, не содержащих ссылок на себя, или не принадлежала бы? Любой ответ противоречил бы отличительному свойству, которым по их определению наделены элементы множества. Это – одна из форм так называемого парадокса Рассела, названного в честь своего автора Бертранда Рассела. «Множество всех множеств» – еще одно понятие, также приводящее к парадоксу. Существование парадоксов показывает, с какой осторожностью следует пользоваться терминологией теории множеств. Тем не менее теория множеств настолько полезна, что большинство математиков не хотели бы отказываться от нее. Было затрачено много усилий, чтобы развить методы, позволяющие исключить возникновение парадоксов в теории множеств. В приложениях теории множеств к другим разделам математики универсальное множество Ω обычно само является некоторым определенным множеством и парадоксальные ситуации здесь не возникают.

Аксиома выбора. Неожиданные трудности в теории множеств могут возникнуть, казалось бы, в самых простых случаях. Если, например, задано семейство непересекающихся множеств, ни одно из которых не пусто, то интуитивно кажется очевидным, что мы можем построить новое множество, содержащее ровно по одному элементу из каждого множества, входящего в это семейство. Но если наше семейство содержит бесконечно много множеств, то для построения нового множества может потребоваться бесконечное число произвольных выборов, а законность такого процесса при тщательном анализе становится отнюдь не очевидной. Аксиома выбора, утверждающая, что такое множество существует, была впервые сформулирована в 1904 Э.Цермело (1871–1953). До сих пор не удалось показать, что аксиома выбора следует из остальных аксиом теории множеств. Но около 1938 К.Гёдель (1906–1978) показал, что если теория множеств непротиворечива (т.е. не содержит внутренних противоречий) без аксиомы выбора, то она остается непротиворечивой и после присоединения к ней аксиомы выбора.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ является составной частью одного из современных быстро развивающихся разделов математики – математической логики. Математическая логика применяется в информатике, позволяет моделировать простейшие мыслительные процессы. Одним из занимательных приложений алгебры высказываний – решение логических задач.

Объекты алгебры высказываний. Операции над высказываниями. Таблицы истинности. Алгебра – это наука, которая изучает множество некоторых элементов и действия (операции) над ними. Если элементы алгебры – натуральные числа, а операции – сложение и умножение, то это алгебра натуральных чисел. Действия с направленными отрезками (векторами) изучает векторная алгебра.

Объектами алгебры высказываний являются высказывания. *Высказывание* – это истинное или ложное повествовательное предложение. Повествовательное предложение, в котором говорится об одном-единственном событии, называется простым высказыванием. Например, предложение «Луна – спутник Земли» есть простое высказывание, предложение «Не сорить!» не является высказыванием.

Высказывания обозначаются большими буквами латинского алфавита. Если высказывание A истинно, то пишут $A = 1$, если ложно, то используют запись $A = 0$.

Как и в других алгебрах, в алгебре высказываний над ее объектами (высказываниями) определены действия, выполняя которые получают новые высказывания. Объединение двух высказываний в одно при помощи союза «И» называется операцией логического умножения. Полученное таким образом высказывание называется логическим произведением. Например, высказывание A – «В лесу растут грибы», высказывание B – «Льюис Кэрролл – математик», составим произведение этих высказываний AB – «В лесу растут грибы и Льюис Кэрролл – математик». Истинность произведения высказываний зависит от истинности перемножаемых высказываний и может быть определена с помощью следующей таблицы:

A	B	AB
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «ИЛИ», употребляемого в неисключающем смысле, называется операцией логического сложения. Например, высказывание A – «Декабрь – зимний месяц», B – «Летом иногда идет дождь», определим высказывание $A+B$ – «Декабрь – зимний месяц или летом иногда идет дождь». Установить истинность логической суммы можно с помощью следующей таблицы:

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Операция логического отрицания осуществляется над одним высказыванием. Выполнить операцию логического отрицания (обозначается $\bar{A}$) – значит получить из данного высказывания новое, присоединяя слова «неверно, что ...» ко всему высказыванию. Истинность высказывания $\bar{A}$ определяется таблицей:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Пользуясь определенными выше операциями, можно из простых высказываний образовывать сложные. Например, всевозможные значения для высказывания $\overline{A\bar{B}}$ можно записать в виде таблицы

A	B	$\bar{B}$	$A\bar{B}$	$\overline{A\bar{B}}$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Тожественные высказывания. Эквивалентные высказывания. Формулы Августа де Моргана. Среди высказываний особое место занимают те, в таблице истинности которых либо одни единицы, либо только нули. Это означает, что высказывание либо всегда истинно, либо ложно, независимо от истинности входящих в него высказываний. Например, высказывание $A+\bar{A}$ всегда истинно, а высказывание $A\bar{A}$ всегда ложно. Доказать это можно составив таблицу истинности этих высказываний.

Сложные высказывания, истинные при любых значениях входящих в них других высказываний, называются тождественно истинными, а высказывания, ложные при любых значениях входящих в них других высказываний, называются тождественно ложными.

Тожественно истинные или тождественно ложные высказывания, если они встречаются в формулах, заменяются в них, соответственно единицей или нулем:

$$B + A\bar{A} = B + 0, \quad A + (B + \bar{B}) = A + 1.$$

Среди высказываний встречаются такие, таблицы истинности которых совпадают. Эти высказывания называются эквивалентными. Эквивалентными являются, например, высказывания $\overline{AB}$ и $\bar{A} + \bar{B}$ (то есть $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$). Это можно проверить составив таблицы истинности этих высказываний:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A\bar{B}$	$\overline{AB}$	$\bar{A} + \bar{B}$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Операции алгебры высказываний обладают следующими важными свойствами:

Логическое умножение:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

Логическое сложение:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + A = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + 0 = A$$

$$A + BC = (A + B)(A + C) \quad A + BC = (A + B)(A + C)$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Отрицание:

$$\bar{\bar{A}} = A; \quad \bar{1} = 0; \quad \bar{0} = 1$$

Формулы, выделенные жирным шрифтом, называются формулами Августа де Моргана (1806–1871). Используя эти формулы, можно, в частности, преобразовывать высказывания: сложные заменять более простыми.

В алгебре высказываний, как и в другой алгебре, возможны тождественные преобразования, но логическое сложение и умножение обладают специфическими свойствами $A + A = A$, $AA = A$, $A + 1 = 1$. Это приводит к необычности действий над многочленами алгебры высказываний. Пусть нужно перемножить два сложных высказывания:

$$(A + B)(A + C) = AA + AC + AB + BC = A + AB + AC + BC.$$

Рассмотрим теперь два первых слагаемых $A + AB = A(1 + B) = A1 = A$ и аналогично $A + AC = A$. Таким образом, окончательно получаем $(A + B)(A + C) = A + BC$.

Преобразование $A + AB = A$ очень часто встречается в алгебре высказываний и называется «поглощение». Есть еще один вид столь же часто встречающегося тождественного преобразования, которое называется «склеивание».

Суть его состоит в следующем: $AB + A\bar{B} = A$ (склеивание произошло по символу B). Соответственно для сложного высказывания $ABC + AB\bar{C}$ склейку можно произвести по символу C , то есть имеет место тождественное преобразование $ABC + AB\bar{C} = AB$.

Решение логических задач. Рассмотренных выше законы алгебры высказываний могут быть применены к решению логических задач. Например:

Задача:

Алеша, Боря и Гриша откопали древний сосуд. О том, где и когда он был изготовлен, каждый из школьников высказал по два предположения:

Алеша: «Это сосуд греческий и сосуд изготовлен в V веке»;

Боря: «Это сосуд финикийский и сосуд изготовлен в III веке»;

Гриша: «Это не греческий сосуд и изготовлен он в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух своих предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Решение:

Введем обозначения простых высказываний:

«Это сосуд греческий» – G ;

«Это сосуд финикийский» – F ;

«Сосуд изготовлен в V веке» – 5 ;

«Сосуд изготовлен в III веке» – 3 ;

«Сосуд изготовлен в IV веке» – 4 .

Можно составить формулы высказываний каждого из школьников с учетом высказывания учителя. Формула Алешиного высказывания имеет вид $G5$. Учитель сказал, что Алеша прав только в одном из своих утверждений, поэтому либо $G = 1$, либо $5 = 1$. Истинным будет высказывание $G\bar{5} + \bar{G}5 = 1$, то есть высказывание «Сосуд греческий и изготовлен не в 5 веке или сосуд не греческий и изготовлен в 5 веке». Аналогично, высказывание Бори можно представить формулой $F\bar{3} + \bar{F}3 = 1$ и высказывание Гриши формулой $\bar{G}4 + G4 = 1$.

Полученные формулы можно рассматривать как логические уравнения и решать систему:

$$\begin{cases} G\bar{5} + \bar{G}5 = 1 \\ F\bar{3} + \bar{F}3 = 1 \\ \bar{G}4 + G4 = 1 \end{cases}$$

Первое высказывание умножается на второе:

$$(G\bar{5} + \bar{G}5)(F\bar{3} + \bar{F}3) = GF\bar{5}\bar{3} + G\bar{F}\bar{5}3 + \bar{G}5F\bar{3} + \bar{G}5\bar{F}3 = 1$$

Произведение $GF\bar{5}\bar{3}$ – ложно потому, что сосуд не может быть изготовлен одновременно в Греции и Финикии, произведение $\bar{G}5\bar{F}3$ – ложно потому, что сосуд не может быть изготовлен одновременно в 3 и 5 вв. После исключения этих высказываний получается следующее уравнение: $G\bar{F}\bar{5}3 + \bar{G}5F\bar{3} = 1$. Это уравнение умножается на третье логическое уравнение составленной системы:

$$(G\bar{F}\bar{5}3 + \bar{G}5F\bar{3})(\bar{G}4 + G4) = G\bar{F}\bar{5}3\bar{G}4 + G\bar{F}\bar{5}3G4 + \bar{G}5F\bar{3}\bar{G}4 + \bar{G}5F\bar{3}G4 = \bar{G}5F\bar{3}\bar{G}4 = 1$$

Высказывания $G\bar{F}\bar{5}3\bar{G}4$, $G\bar{F}\bar{5}3G4$, $\bar{G}5F\bar{3}\bar{G}4$ исключены как ложные. Из полученного высказывания $\bar{G}5F\bar{3}\bar{G}4 = 1$ следует, что «Сосуд изготовлен в Финикии и сосуд изготовлен в 5 веке». Это утверждение согласуется с данными поставленной задачи.